

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана  
Факультет "Фундаментальные науки"  
Кафедра "Высшая математика"

Аналитическая геометрия  
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра  
Лекция 1.1

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.



# Матрицы



## Определение

**Числовой матрицей** размера  $m \times n$  (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется  $m$  строк и  $n$  столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.



# Матрицы

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ...



# Матрицы

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$



# Матрицы

Здесь  $a_{ij}$  - элемент матрицы, находящийся в строке под номером  $i$  и в столбце под номером  $j$ .



# Матрицы

Здесь  $a_{ij}$  - элемент матрицы, находящийся в строке под номером  $i$  и в столбце под номером  $j$ . Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность:  $A_{m \times n}$ , где  $m$  - число строк, а  $n$  - число столбцов.



# Матрицы

Здесь  $a_{ij}$  - элемент матрицы, находящийся в строке под номером  $i$  и в столбце под номером  $j$ . Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность:  $A_{m \times n}$ , где  $m$  - число строк, а  $n$  - число столбцов. Часто используется сокращенная запись матрицы:  $A = (a_{ij})$ .





# Матрицы

*Пример.*



# Матрицы

*Пример.*  $A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$



# Матрицы

*Пример.*  $A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  - матрица  $A$  имеет размер  $2 \times 4$ , т.к. она содержит 2 строки и 4 столбца,



# Матрицы

*Пример.*  $A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  - матрица  $A$  имеет размер  $2 \times 4$ , т.к. она содержит 2 строки и 4 столбца, ее элемент  $a_{23} = 7$  расположен во второй строке и третьем столбце.



# Виды матриц



# Виды матриц

## *Определение*

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае – **прямоугольной**.



# Виды матриц

## *Определение*

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае – **прямоугольной**.

## *Определение*

Квадратная матрица размера  $n \times n$  называется **матрицей  $n$ -ого порядка**.



# Виды матриц

## *Определение*

В квадратной матрице элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют **главную диагональ**, а элементы  $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$  - **побочную**.





# Виды матриц

## Определение

В квадратной матрице элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют **главную диагональ**, а элементы  $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$  - **побочную**.

Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$



# Виды матриц

## *Определение*

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.



# Виды матриц

## *Определение*

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

## *Определение*

**Единичной матрицей** называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Обозначение:  $E$ .



# Виды матриц

## *Определение*

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.



# Виды матриц

## *Определение*

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$



# Виды матриц

## *Определение*

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение:  $O$ .



# Виды матриц

## *Определение*

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение:  $O$ .

## *Определение*

Матрица, состоящая только из одного столбца или одной строки, называется **вектором** (**вектор-столбцом** или **вектор-строкой**)



# Линейные операции над матрицами





# Линейные операции над матрицами

## *Определение*

Две матрицы  $A$  и  $B$  называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.



# Линейные операции над матрицами

## *Определение*

Две матрицы  $A$  и  $B$  называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.  
Обозначение:  $A = B$ .



*Определение*

**Суммой (или разностью) двух матриц** одинакового размера  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$ , элементы которой равны сумме (или разности) соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ .



*Определение*

**Суммой (или разностью) двух матриц** одинакового размера  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$ , элементы которой равны сумме (или разности) соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ .

Обозначение:  $C = A + B$ ,  $C = A - B$ .



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$C = A + B$$





# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



## *Определение*

**Произведением матрицы  $A$  на число  $\alpha$**  называется матрица  $B$ , каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы  $A$  на число  $\alpha$ .



## *Определение*

**Произведением матрицы  $A$  на число  $\alpha$**  называется матрица  $B$ , каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы  $A$  на число  $\alpha$ .

Обозначение:  $B = \alpha \cdot A$ .



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Тогда





# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$B = 2 \cdot A$$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} B &= 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# Линейные операции над матрицами

*Пример.*

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} B &= 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



# Линейные операции над матрицами

*Определение*

Матрица  $(-1) \cdot A$  называется  
**противоположной** матрице  $A$ .



## *Определение*

Матрица  $(-1) \cdot A$  называется  
**противоположной** матрице  $A$ .

Обозначение:  $-A$ .



# Линейные операции над матрицами

*Свойства линейных операций:*



# Линейные операции над матрицами

*Свойства линейных операций:*

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$





# Линейные операции над матрицами

*Свойства линейных операций:*

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

2) ассоциативный закон сложения матриц

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$



# Линейные операции над матрицами

*Свойства линейных операций:*

3) дистрибутивный закон умножения  
относительно сложения матриц

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B;$$



# Линейные операции над матрицами

*Свойства линейных операций:*

3) дистрибутивный закон умножения  
относительно сложения матриц

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

4) дистрибутивный закон умножения  
относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A;$$



# Линейные операции над матрицами

*Свойства линейных операций:*

5) ассоциативность относительно умножения чисел

$$\alpha (\beta A) = (\alpha \beta) A.$$



# Нелинейные операции над матрицами



# Нелинейные операции над матрицами

## *Определение*

Матрица  $A$  называется **согласованной** с матрицей  $B$ , если число столбцов матрицы  $A$  совпадает с числом строк матрицы  $B$ .



# Нелинейные операции над матрицами

## Определение

**Произведением двух согласованных матриц**  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и  $B_{n \times k} = (b_{ij})$  называется матрица  $C_{m \times k} = (c_{ij}) = A \cdot B$ , каждый элемент которой равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -ого столбца матрицы  $B$ , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Пример.*





# Нелинейные операции над матрицами

*Пример.* Найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$  (если они существуют):



# Нелинейные операции над матрицами

*Пример.* Найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$  (если они существуют):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Пример.* Найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$  (если они существуют):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $A_{2 \times 2}$  и  $B_{2 \times 3}$  являются согласованными.



# Нелинейные операции над матрицами

*Пример.* Найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$  (если они существуют):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $A_{2 \times 2}$  и  $B_{2 \times 3}$  являются согласованными. В результате умножения  $A$  на  $B$  получится матрица размера  $2 \times 3$ :



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$





# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ & \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & & \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$



# Нелинейные операции над матрицами

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



# Нелинейные операции над матрицами

Матрицы  $B_{2 \times 3}$  и  $A_{2 \times 2}$  не являются согласованными, поэтому произведение  $B \cdot A$  не существует.





# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции умножения:*



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции умножения:*

$$1) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции умножения:*

$$1) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции умножения:*

$$1) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$3) (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B);$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции умножения:*

$$1) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$3) (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B);$$

$$4) \text{ в общем случае } A \cdot B \neq B \cdot A;$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции умножения:*

$$1) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$3) (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B);$$

$$4) \text{ в общем случае } A \cdot B \neq B \cdot A;$$

$$5) A \cdot E = E \cdot A = A.$$



## Определение

**$n$ -ой степенью матрицы  $A$**  называется матрица  $A^n$ , равная  $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$  ( $n$  раз).



## Определение

**$n$ -ой степенью матрицы  $A$**  называется матрица  $A^n$ , равная  $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$  ( $n$  раз).  
При этом полагают, что  $A^0 = E$ .





## *Определение*

Матрица, полученная из матрицы  $A$  заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к  $A$ .



## *Определение*

Матрица, полученная из матрицы  $A$  заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к  $A$ .

Обозначение:  $A^T$ .



# Нелинейные операции над матрицами

*Пример.*



# Нелинейные операции над матрицами

Пример. Если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,



# Нелинейные операции над матрицами

Пример. Если  $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , то

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$



## *Определение*

Операция нахождения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы**.



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции транспонирования:*



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции транспонирования:*

$$1) (A^T)^T = A;$$





# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции транспонирования:*

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции транспонирования:*

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T;$$



# Нелинейные операции над матрицами

*Свойства операции транспонирования:*

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T;$$

$$4) (\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T.$$



## *Определение*

Квадратная матрица  $A$  называется **симметрической (или симметричной)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е.  $A^T = A$ .



# Элементарные преобразования матриц



# Элементарные преобразования матриц

## *Определение*

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:



# Элементарные преобразования матриц

## *Определение*

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;



# Элементарные преобразования матриц

## *Определение*

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

- 1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;
- 2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;





# Элементарные преобразования матриц

## *Определение*

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

- 1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;
- 2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда.



# Элементарные преобразования матриц

## *Определение*

Две матрицы  $A$  и  $B$  называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.



# Элементарные преобразования матриц

## Определение

Две матрицы  $A$  и  $B$  называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение:  $A \sim B$ .

